Licence 2 : Sciences et technologie

Intégrales multiples

Exercice 1

Soit D le rectangle de sommets $O(0,\,0)$, $A(\pi,\,0)$, $B(0,\,1)$ et $C(\pi,\,1)$.

1. Dessiner D dans un repère orthonormé.
2. Calculer
$$I = \int\int_D f(x,\,y)dx\,dy$$
où $f(x,\ y) = 2y\sin x$.

Exercice 2

Soit D le triangle de sommets A, B et C de coordonnées respectives $(1,\,0)$, $(0,\,1)$ et $(0,\,-1)$ dans un repère orthonormé.

1. Dessiner D.
2. Justifier que $D = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, -1 \leqslant x-1 \leqslant y \leqslant 1-x \leqslant 1\}$.
3. Calculer
$$I = \int\int_D f(x,\,y)dx\,dy,$$
avec $f(x,\,y) = x + 2y$.

Exercice 3

Soit $D = \{(x,\,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ |x| + ||y| \leqslant 1\}$.

1. Dessiner D.
2. Calculer
$$I = \int\int_D f(x,\,y)dx\,dy,$$
où $f(x,\,y) = e^{x+y}$.

Exercice 4

Soit D la couronne limitée par les cercles de centre O (origine du repère) et de rayons respectifs a et b $(0 < a < b)$.

1. Dessiner D dans un repère orthonormé.
2. Calculer
$$I = \int\int_D f(x,\,y)dx\,dy$$
où $f(x,\ y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$.

Exercice 5

Soit D l'ensemble des points du plan limité par le cercle de centre $(0,\,0)$ et de rayon 3 et le cercle de centre $(1,\,0)$ et de rayon 1.

1. Dessiner D.
2. Calculer
$$I = \int\int_D f(x,\ y) dx\, dy$$
où $f(x,\ y) = x^2 + y^2$.

Exercice 6
Soit $D = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2\ :\ x > 0,\ y > 0,\ x + y < 1\}$.

1. Dessiner D.
2. Calculer
$$I = \int\int_D f(x,\ y) dx\, dy$$
où $f(x,\ y) = \dfrac{y}{\sqrt{x}} \ln(1 - x - y)$ en utilisant le changement de variables suivant :
$$x = X(1 - Y) \qquad \text{et } y = XY.$$

Exercice 7
Calculer $I = \displaystyle\int\int\int_D f(x,\ y,\ z) dx\, dy\, dz$, où
$$D = \{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3 :\ 0 \leqslant z \leqslant x^2 + y^2, 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant 1\}$$
et $f(x,\ y\, z) = x + y + z$.

Exercice 8
Déterminer si les formes différentielles suivantes sont exactes et dans ce cas les intégrer.

1. $\omega_1 = 2xy\, dx + x^2 dy$.
2. $\omega_2 = xydx - zdy + xzdz$.
3. $\omega_3 = 2xe^{x^2-y}dx - 2e^{x^2-y}dy$.